Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne XXIII/XXIV (1990–91)

Ks. JERZY DADACZYŃSKI

ELEMENTY FILOZOFII PRZYRODY GEORGA CANTORA

Nazwisko Georga Cantora (1845–1918)[1] jest w dziejach matematyki na stałe związane z powstaniem teorii mnogości. Punktem wyjścia jego poszukiwań była analiza matematyczna. Początkowe prace nad szeregami trygonometrycznymi, inspirowane przez wyniki Riemanna w tej dziedzinie, doprowadziły go w naturalny sposób, w 1872 r., do pierwszej próby klasyfikacji zbiorów „wyjątkowych", które pojawiły się w tej teorii, za pomocą pojęcia kolejnych „zbiorów pochodnych", które przy tej okazji wprowadził. W okresie 1874–1897 opublikował swoje fundamentalne prace z teorii mnogości, która miała w XX wieku odegrać zasadniczą rolę w rozwoju całej matematyki, przede wszystkim zaś w badaniu jej logicznych i filozoficznych podstaw.

Najważniejszą częścią cantorowskiej teorii mnogości były rozważania dotyczące zbiorów nieskończonych. Odróżniał, idąc za Arystotelesem, nieskończoność aktualną oraz potencjalną. Jak się wydaje, najistotniejszym, wręcz „rewolucyjnym" posunięciem Cantora było uznanie istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych i wprowadzenie ich do stworzonej przez siebie teorii mnogości. Akceptacja nieskończoności aktualnej prowadziła do licznych paradoksów; między innymi przeczyła dobrze zadomowionemu zarówno w matematyce, jak i filozofii aksjomatowi stanowiącemu, że „część jest mniejsza od całości".

Paradoksalność wielu rezultatów sprawiła, że prace teoriomnogościowe Cantora zostały w jego czasach uznane ze nieortodoksyjne. W atakach na matematyka z Halle celował przede wszystkim jego dawny berliński nauczyciel L. Kronecker. Reakcją Cantora na nieprzejednaną opozycję środowiska matematycznego w Niemczech była próba filozoficznego usprawiedliwienia istnienia aktualnej nieskończoności. W tym celu podjął nawet szerokie studia z zakresu historii filozofii. W publikowanych pracach o charakterze filozoficznym starał się odeprzeć zarzuty — już sformułowane, bądź spodziewane — ze strony środowiska matematyków, a także ze strony różnych szkół filozoficznych, a nawet zwolenników chrześcijańskiego teizmu[2].

---

[1] Podstawowe dane biograficzne G. Cantora można znaleźć w monografii: H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967.

[2] Por. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, w: Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932, s. 165–209.

Mogłoby się wydawać, że przedmiotem filozoficznych analiz Cantora były wyłącznie zagadnienia podstaw ontologicznych matematyki. Owszem, te kwestie dominowały, ale z konieczności musiały być związane z ogólniejszymi dociekaniami natury metafizycznej a nawet teodycealnej. Przy okazji Cantor poruszył kilkakrotnie w swoich pracach zagadnienia, które można zaliczyć do tradycyjnie rozumianej filozofii przyrody. Podjęcie tej tematyki wynikało — jak się wydaje — z dwu istotnych powodów. Po pierwsze, niektóre twierdzenia o charakterze topologicznym, sformułowane i udowodnione przez Cantora, mogły w jego pojęciu posłużyć do zakwestionowania podstawowych założeń ówczesnej fizyki, przede wszystkim zaś mechaniki. Tego typu uwagi, czynione przez Cantora na marginesie jego prac teoriomnogościowych, prowadziły go do ogólniejszych rozważań niektórych zagadnień filozofii przyrody. Po wtóre, obrona wysoce abstrakcyjnej teorii, jaką była teoria mnogości, implikowała znalezienie jakichś jej „zastosowań" w naukach przyrodniczych. Stworzenie modelu opartego na teorii mnogości i dobrze tłumaczącego przynajmniej jakiś wycinek świata zjawiskowego mogło stanowić pewne jej „usprawiedliwienie" Apologiczny charakter filozofii Cantora i wynikające stąd poszukiwania intuicji dla przyszłych „zastosowań" teorii mnogości stanowiły drugą przyczynę podjęcia przez niego zagadnień filozofii przyrody.

Celem niniejszego artykułu jet prezentacja tego niezbyt szeroko znanego i w sumie marginalnego zakresu filozoficznego dorobku Cantora. Trudno bowiem mówić o jakiejś spójnej i kompletnej cantorowskiej filozofii przyrody. Tym niemniej podjęcie tych wątków jego prac dopomoże — jak się wydaje — wydobyć i naświetlić pewne inspiracje filozoficzne, które miały wpływ na ostateczny kształt filozoficznych i matematycznych przekonań matematyka z Halle.

I. KRYTYKA MECHANIKI I MECHANICYZMU

W serii sześciu rozpraw ogłoszonych w „Mathematische Annalen" w latach 1878–1884[3] Cantor zajmował się jednocześnie problemami równoliczności zbiorów, własnościami topologicznymi zbiorów punktowych oraz zagadnieniem miary. Artykuł z 1882 r. zawierał dowód twierdzenia, które po raz pierwszy zainspirowało Cantora — w pracach publikowanych za jego życia — do zastosowania teorii zbiorów w rozważaniach, które nie miały ściśle matematycznego charakteru.

Cantor rozpatrywał zbiór M wszędzie gęsty (w sensie cantorowskim) w ciągłej dziedzinie A. Zbiór A mógł być zwykłą dwuwymiarową przestrzenią euklidesową (ε^2), której każdy punkt był określony przez parę uporządkowaną liczb rzeczywistych (x, y). Natomiast zbiór M był zbiorem tych i tylko tych punktów płaszczyzny A, które były wyznaczone przez pary uporządkowane liczb wymiernych (x', y'). Następnie zdefiniował nową przestrzeń $U = A - M$ i sformułował twierdzenie mówiące, iż dla dowolnych punktów N i N' należących do zbioru U istnieje linia ciągła l', łącząca punkty N i N' i zawierające się całkowicie w zbiorze U[4]. Dowód tego twierdzenia oparty był na ciągłości łuku kołowego oraz na udowodnionej wcześniej przez Cantora nierównoliczności dwu nieskończonych zbiorów: zbioru liczb wymiernych, który jest policzalny, oraz zbioru

---

[3] Por. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, w: Georg Cantor, *Gesammelte*, s. 136–246.

[4] Por. tamże, s. 155.

liczb rzeczywistych, który jest niepoliczalny[5].

Idea dowodu sprowadzała się do przeanalizowania zbioru wszystkich okręgów na płaszczyźnie A, do których należały punkty N i N'. Zbiór środków tych okręgów był identyczny z prostą g; prostopadłą do odcinka $\overline{NN'}$ i przechodzącą przez jego środek. Ponieważ prosta g, równoliczna ze zbiorem liczb rzeczywistych, była niepoliczalnie nieskończonym zbiorem punktów, oczywisty był wniosek, że rozpatrywany zbiór okręgów był takiej samej mocy. Z kolei jedynie policzalnie nieskończenie wiele punktów ze zbioru M mogło leżeć na tych okręgach, ponieważ sam zbiór M był jedynie policzalnie nieskończony. A zatem — wnioskował Cantor — istnieje przynajmniej jeden łuk kołowy (ponieważ istnieje przynajmniej jeden taki okrąg), który łączy punkty N i N' i nie zawiera żadnego elementu ze zbioru M, czyli cały zawiera się w zbiorze $U = A - M$.[6]

Twierdzenie to mogło być w prosty sposób uogólnione na inne przypadki, w których A było dowolną n-wymiarową przestrzenią euklidesową. Z filozoficznego punktu widzenia szczególnie interesująca sytuacja powstała dla $n = 3$, a więc dla zwykłej trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, która zgodnie z założeniami mechaniki newtonowskiej miała dobrze odwzorowywać świat zjawiskowy. Cantor dostrzegł doniosłość filozoficzną udowodnionego twierdzenia i wykorzystał je do zakwestionowania przekonania o ciągłości przestrzeni fizycznego świata. Otóż — jego zdaniem — twierdzenie to dowodziło możliwości zachodzenia ciągłych ruchów w nieciągłych przestrzeniach typu U. Równocześnie twierdził, że zdroworozsądkowe przekonanie o ciągłości przestrzeni fizycznej wynikało jedynie z możliwości obserwowania w niej ciągłych ruchów. Zatem — w przekonaniu Cantora — przyjęcie ciągłości tej przestrzeni było jedynie arbitralnym założeniem[7].

Podobna krytyka — dotycząca tradycyjnego założenia ciągłości przestrzeni — była zawarta *implicite*, w pracach publikowanych w poprzedniej dekadzie przez Cantora i Dedekinda. Cantor, nie będąc w stanie przeprowadzić dowodu, był zmuszony przyjąć jako aksjomat tezę, że arytmetycznie określony punkt na linii rzeczywistych można było jednoznacznie utożsamić z fizycznie realnym punktem w przestrzeni geometrycznej[8]. Dziesięć lat później zareagował bardziej stanowczo. W rzeczywistości nie istniała dla niego żadna konieczność traktowania każdego punktu danego przez współrzędne x, y, z jako faktycznie należącego do trójwymiarowej przestrzeni. Było to przypuszczenie, które — jak twierdził Cantor — „musi być traktowane jako wolny akt naszej konstruktywnej aktywności. Hipoteza ciągłości przestrzeni jest stąd niczym innym tylko przypuszczeniem — samym w sobie arbitralnym — o pełnej, wzajemnie jednoznacznej korespondencji pomiędzy trójwymiarowym arytmetycznym *continuum* (x, y, z) a przestrzenią będącą podstawą zjawisk"[9].

Możliwość ciągłego ruchu w przestrzeni U stanowiła dla matematyka z Halle punkt wyjścia dla podniesienia jeszcze innych, doniosłych dla samej fizyki oraz

[5] Cantor udowodnił w roku 1873, że zbiór liczb wymiernych jest policzalny, to znaczy równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Następnie postawił problem równoliczności zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb rzeczywistych, który rozstrzygnął negatywnie. Oznaczając moc zbioru liczb naturalnych (a więc i wymiernych) przez $alef_0$, udowodnił, że moc zbioru liczb rzeczywistych wynosi 2^{alef_0}. Na podstawie ogólnej własności liczb kardynalnych $m < 2^m$, zbiór liczb rzeczywistych jest „bogatszy w elementy" od zbioru liczb wymiernych ($alef_0 < 2^{alef_0}$).

[6] Por. G. Cantor, *Über unendliche*, s. 155.

[7] Por. tamże, s. 157.

[8] Por. B. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, w: Georg Cantor, *Gesammelte*, s. 92–102.

[9] Por. G. Cantor, *Über unendliche*, s. 156.

filozofii przyrody kwestii. Można było konstruować inne przestrzenie, podobne do zbioru U w tym sensie, że dopuszczały one ruch ciągły, a były tworzone przez „wyjęcie" z ciągłej przestrzeni jakiegoś wszędzie gęstego zbioru. Powstawał wtedy problem, która z tak skonstruowanych przestrzeni nadaje się najlepiej na hipotezę leżącą u podstaw mechaniki? Cantor nie wskazał wprost żadnego rozstrzygnięcia. Twierdził natomiast, że w takiej sytuacji konieczne jest tworzenie nowych mechanik: M_1, M_2, M_3,... Ich odmienność wynikałaby z przyjmowania odmiennych założeń dotyczących topologicznych własności świata fizycznego. Zdaniem Cantora studia dotyczące zrewidowanych, alternatywnych mechanik mogły prowadzić do nowych, znaczących odkryć w fizyce[10]. Nie można natomiast odpowiedzieć na pytanie, czy według koncepcji Cantora należałoby ostatecznie tolerować pluralizm tak skonstruowanych mechanik jako zespołu w pewnym sensie komplementarnych teorii, czy też w danym czasie preferować tę, która tłumaczyłaby najwięcej danych obserwacyjnych?

Cantor zaatakował fizyków — podobnie jak to czynił wcześniej wobec matematyków, takich jak Kronecker — za oparcie mechaniki na intuicyjnym założeniu ciągłości przestrzeni. Intuicja — jego zdaniem — powinna być wyrugowana z obydwu tych dyscyplin naukowych[11].

Warto wspomnieć, że w innej publikacji twórca teorii mnogości dokonał podobnej krytyki równie intuicyjnej hipotezy dotyczącej ciągłości czasu. Czas to jedynie pojęcie pomocnicze, wiążące ruchy w świecie fizycznym. Należy odrzucić — jak sugerował — czas jako bazę miary w dynamice i raczej przyjąć ruch jako pewną miarę czasu. Idąc konksekwentnie dalej, odrzucił istnienie obiektywnego, absolutnego czasu w świecie. Przestrzeń i czas to nic innego jak subiektywne, aprioryczne formy intuicji[12].

Zakwestionowanie przez Cantora klasycznego rozumienia czasu i przestrzeni postawiło go w opozycji zarówno do fizyki newtonowskiej, jak i klasycznego mechanicyzmu na płaszczyźnie filozoficznej. Ale było to również wymierzone — jak się wydaje — wobec teoriopoznawczych założeń kantowskich. Świadczy o tym ostra krytyka roli intuicji w zakresie epistomologii, przy równoczesnym sklasyfikowaniu apriorycznych kategorii czasu i przestrzeni jako intuicyjnych. Odejście Cantora od żywej w Niemczech w XIX wieku tradycji kantowskiej wynikało również z innych przesłanek. W ujęciu Kanta aprioryczne kategorie czasu i przestrzeni były podstawą istnienia sądów syntetycznych apriori, czyli zdań matematyki. Ze względu na manifestowany antyintuicjonizm, kantowskie ujęcie podstaw matematyki było dla Cantora nie do przyjęcia.

II. NOWA WIZJA NAUK PRZYRODNICZYCH

Refleksja Cantora w zakresie filozofii przyrody nie miała wyłącznie charakteru polemicznego wobec zastanych poglądów. Obok krytyki można odnaleźć w jego wypowiedziach sporo elementów konstruktywnych, co wynikało z przekonania o dużych możliwościach eksplanacyjnych właściwie zbudowanych nauk przyrodniczych. Jak zaznaczono wcześniej, zainteresowania Cantora nie ograniczały się do wysoce abstrakcyjnej, czysto teoretycznej pozaskończonej

---

[10] Por. tamże, s. 157.

[11] Por. G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, w: Georg Cantor, *Gesammelte*, s. 120–121 (119–133).

[12] Por. G. Cantor, *Grundlagen*, s. 192.

teorii zbiorów. Twierdził, że możliwość zastosowań idei teoriomnogościowych były zawsze doniosłym stymulatorem jego prac i odkryć w zakresie matematyki. W 1883 r., podczas odczytu wygłoszonego we Freiburgu dla matematyków niemieckich, Cantor podkreślił, że: „jeden z najbardziej doniosłych problemów teorii mnogości — którego większą część, jak jestem przekonany, rozwiązałem w moim artykule «Grundlagen einer allegemeinen Mannigfaltigkeitslehre» — polega na określeniu różnych wartości lub mocy zbiorów obecnych w całości natury (o ile możemy je znać). Doszedłem do tego przez rozwinięcie pojęcia typu dobrze uporządkowanych zbiorów albo, innymi słowy, dzięki pojęciu liczb porządkowych”[13].

Jak rozumiał Cantor możliwość zastosowania swoich koncepcji teoriomnogościowych w naukach przyrodniczych? Do wyraźnej prezentacji takiej koncepcji zachęcał go jego szwedzki wydawca H. Mittag-Leffler. Celem miała być najprawdopodobniej obrona samej teorii mnogości przez pokazanie jej aplikowalności w naukach przyrodniczych[14].

Cantor był krytycznie ustosunkowany do założeń tkwiących u podstaw fizyki oraz innych nauk przyrodniczych[15]. Twierdził, że szczególnie te, które dotyczyły budowy materii, były niewyraźne i nieprecyzyjne. Albo uprawiano nauki przyrodnicze bez jakichkolwiek podstawowych założeń określających fizyczną kostytucję materii, albo przyjmowano istnienie atomów, korpuskuł materialnych o minimalnych rozmiarach i dlatego rozciągłych w przestrzeni. Zdaniem Cantora dla rozwinięcia satysfakcjonującej teorii, dobrze tłumaczącej zjawiska natury, było konieczne przyjęcie dwu fundamentalnych hipotez. Pierwsza głosiła, że zbiór wszystkich cząsteczek materialnych jest nieskończony. Według drugiej należało traktować podstawowe elementy materii jako nierozciągłe punkty przestrzenne, ponieważ ich rozmiary w stosunku do wielkości przestrzeni były zaniedbywalne. Przyjęcie takich założeń umożliwiało — według matematyka z Halle — bezpośrednią aplikację wypracowanych przez niego twierdzeń teoriomnogościowych do nauk przyrodniczych[16].

Twórca teorii mnogości sugerował, że przekonał się do przedstawionej wyżej koncepcji podstawowych form materii dzięki lekturze takich autorów, jak Faraday, Ampère, Weber i Cauchy[17]. Tym niemniej zasadnicza inspiracja stała się jawna poprzez przyjęcie przez Cantora charakterystycznej terminologii. Elementarne składniki materii, które utożsamiał z nierozciągłymi jednostkami porównywalnymi z materialnymi punktami, nazwał „monadami”[18]. Jak się wydaje, to właśnie monadologia Leibniza była główną inspiracją cantorowskiej wizji zastosowania teorii mnogości w naukach przyrodniczych.

Następny krok uczyniony przez Cantora wskazywał wyraźnie, że jego monadologia pozostawała w ścisłym związku z paradygmatem dziewiętnastowiecznej fizyki. Matematyk z Halle uznał dychotomię w świecie monad, przyjmując zarówno istnienie monad materialnych, jak i eterycznych. Do czasu odrzucenia istnienia pierwiastka eterycznego, jako substancji o sprzecznych własnościach,

---

[13] Z listu do K. Lasswitza z 15.02.1884, w: Georg Cantor, *Gesammelte* s. 387.

[14] Por. list Cantora do G. Mittag-Lefflera, w: I. Grattan-Guiness, *An Unpublished Paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung*, „Acta Mathematica” 124 (1970), s. 78–80 (65–107).

[15] Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen*, w: Georg Cantor, *Gesammelte*, s. 275 (261–277).

[16] Por. tamże.

[17] Por. tamże.

[18] Por. tamże, s. 275–276.

stanowił on podstawę tłumaczenia wielu zjawisk fizycznych[19]. Najistotniejsze na tym etapie było dla Cantora określenie mocy dwu rozróżnionych zbiorów monad. Przyjął kolejne założenie, które zwykło się nazywać „cantorowską hipotezą świata"[20]. Otóż, ogół wszystkich monad materialnych istniejących we wszechświecie miał konstytuować zbiór nieskończony, ale policzalny, o mocy *alef*$_0$. Zaś zbiór monad eterycznych był niepoliczalnie nieskończony, o mocy *alef*$_1$, a więc „bogatszy w elementy"[21]. Taka hipoteza była uprawdopodobniona — według Cantora — dzięki udowodnionemu przez niego twierdzeniu, że nieskończonym zbiorem punktów mogły przysługiwać jedynie dwie moce, odpowiadające dwom liczbom kardynalnym: *alef*$_0$ i *alef*$_1$.

Podobnie dowolne ciało fizyczne, będące zbiorem monad materialnych, można było traktować jako zbiór punktów P. Zbiór P — na podstawie cantorowskiej hipotezy — był mocy *alef*$_0$, natomiast eteryczne monady zajmujące tę samą przestrzeń tworzyły zbiór Q o mocy *alef*$_1$. Odwołując się do przyjętej wcześniej techniki dekompozycji[22] zbiorów, Cantor mógł dokonać rozłącznego podziału zbioru P:

$$P = Pr + Pi_1$$

---

[19] Por. tamże.

[20] Por. list Cantora do G. Mittag-Lefflera z 16.11.1884, cyt. za J. Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge 1979, s. 292.

[21] Według tzw. „hipotezy continuum" Cantora *alef*$_1 = 2^{alef_0}$ (por. także przypis 5). Tej hipotezy, pomimo usilnych starań, nie udało się Cantorowi nigdy udowodnić. Dzięki rozwinięciu metod matematycznych wykazano w XX wieku, że „hipoteza continuum" jest niesprzeczna i niezależna od aksjomatów teorii mnogości. Zatem jej status w teorii mnogości jest analogiczny do statusu słynnego V postulatu Euklidesa w geometrii (można budować teorie mnogości włączając aksjomatykę „hipotezę continuum" lub jej zaprzeczenie).

[22] Opierając się na relacjach pomiędzy zbiorem P i zbiorem pochodnym P', Cantor wprowadził następującą klasyfikację zbiorów:

$$P \text{ jest } \begin{array}{l} \text{domknięty} \\ \text{doskonały} \\ \text{gęsty w sobie} \end{array} \text{ jeśli } P \begin{array}{l} \supset P' \\ = P' \\ \subset P' \end{array} \qquad (1)$$

Później wprowadził pewne typy podzbiorów zbioru P:

1. Koherencja (*Cohärenz*) z P, definiowana jako:

$$Pc \equiv P \cap P' \qquad (2)$$

2. Adherencja (*Adhärenz*) z P, określona przez:

$$Pa \equiv P \cap (P - P') \qquad (3)$$

Wyrażenia (2) i (3) dawały następujący rozłączny podział zbioru P:

$$P \equiv Pa \cup Pc \qquad (4)$$

oraz pozwalały wprowadzić ciągi zbiorów w pewnym sensie analogicznych do ciągu zbiorów pochodnych:

$$Pc^2, Pc^3, Pc^4 \qquad (5)$$
$$Pa^2, Pa^3, Pa^4 \qquad (6)$$
$$Pac, Pca \qquad (7)$$

Wyrażenie (7) umożliwiało wprowadzenie następującego twierdzenia:

$$P \equiv \Big(\bigcup_{\alpha' < \alpha} (Pac^{\alpha'})\Big) \cup (Pc^{\alpha}) \qquad (8)$$

gdzie α było skończoną lub pozaskończoną liczbą porządkową. Jednocześnie twierdzenie (8) prowadziło do konstrukcji nowych kategorii zbiorów:

3. Inherencja (*Inhärenz*) z P, definiowana jako:

$$Pi \equiv Pc^{\alpha} \qquad (9)$$

4. Zbioru Pr, określonego przez:

$$Pr \equiv \bigcup_{\alpha' < \alpha} (Pac^{\alpha'}) \qquad (10)$$

Zatem wyrażenie (8) można było zapisać następująco:

$$P \equiv Pr \cup Pi \qquad (11)$$

Następnie Cantor wprowadził jeszcze jedno nowe pojęcie: zbioru homogenicznego o α-tym porządku.

Ponieważ zbiór P był mocy $alef_0$, nie istniały żadne inne jego inherencje (Inhärenz)[23] poza Pi_1, natomiast dekompozycja zbioru Q wygląda następująco:

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2$$

Zdaniem Cantora podzbiory Pi_1, Qi_1, Qi_2 oddzielnie bądź w różnych kombinacjach były wystarczające dla wytłumaczenia szerokiej gamy własności materii. Sugerował, że dzięki jego technikom dekompozycji zbiorów będzie możliwe dotarcie do istoty takich zjawisk, jak elektryczność, magnetyzm, światło, ciepło, a także uchwycenie różnic w składzie i własnościach chemicznych poszczególnych ciał[24].

Wizja Cantora obejmowała zatem koncepcję stworzenia pewnej teorii unitarnej. Teorii, która byłaby zdolna połączyć poszczególne dyscypliny fizyki, a także chemii. Podstawą i uniwersalnym językiej jednoczącej teorii miała być cantorowska teoria mnogości. Można — jak się wydaje — doszukiwać się w takim pomyśle leibnizjańskich tęsknot za stworzeniem języka uniwersalnego, który, niejako automatycznie, tłumaczyłby powstające w różnych naukach problemy.

Jednakże program Cantora nie ograniczał się wyłącznie do stworzenia uniwersalnej teorii obejmującej fizykę i chemię. Niechęć wobec newtonowskiej mechaniki była również po części inspiracją poszukiwania teorii „organicznej", tłumaczącej obok zjawisk przyrody nieożywionej również procesy biologiczne. Potrzebę takiej teorii, wyposażonej w wypracowane przez niego pojęcia teoriomnogościowe, prezentował Cantor następująco: „...dotychczas nie poczyniono żadnej próby, która mogłaby zastąpić mechaniczne tłumaczenie natury (które ma do dyspozycji cały aparat analizy matematycznej, a którego nieadekwatność była podkreślana już przez Kanta), a jednocześnie byłaby wyposażona w równie rygorystyczny aparat matematyczny i miała na celu «organiczne» wyjaśnienie natury"[25].

W przekonaniu twórcy teorii mnogości wyższość przyszłej „organicznej teorii natury" nad programem mechanicyzmu wynikała z kilku przesłanek. Przy zachowaniu matematycznej ścisłości powinna ona bardziej adekwatnie tłumaczyć fenomeny biologiczne, które okazały się nieredukowalne do newtonowskiej mechaniki. Poza tym filozofia odwołująca się do mechaniki zdawała się wprowadzać materializm, którego początki w dziejach nowożytnych wiązał Cantor z Izaakiem Newtonem i jego metafizyką. Również determinizm — którego matematyk z Halle był zdecydowanym przeciwnikiem — kojarzył się z dorobkiem Newtona w filozofii i fizyce[26]. Zatem pozanaukowe przekonania Cantora, a przede wszystkim jego opcja teistyczna i niechęć do determinizmu,

---

Punkt akumulacji p' zbioru P był określony jako punkt o a-tym porządku wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn mnogościowy zbioru P i dowolnej kuli o środku p' był o mocy a. Dla zbioru gęstego w sobie każdy punkt był oczywiście punktem akumulacji. Jeśli dodatkowo każdy punkt był punktem akumulacji o a-tym porządku, to Cantor określał taki zbiór jako homogeniczny o a-tym porządku. Nowe pojęcie dawało możliwość podziału zupełnego zbiorów gęstych w sobie:

$$P \equiv P_1 \cup P_2 \qquad (12)$$

gdzie P_1 i P_2 były zbiorami homogenicznymi o porządkach odpowiednio $alef_0$ i $alef_1$. Jeśli zbiór P w (11) był gęsty w sobie, wyrażenie to przyjmowało postać:

$$P = Pr + Pi_1 + Pi_2 \qquad (13)$$

(Opracowano na podstawie I. Grattan-Guiness, dz. cyt., s. 72–74).

[23] Por. przypis 22.

[24] Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme*, s. 276.

[25] Por. G. Cantor, *Grundlagen*, s. 177.

[26] Por. list Cantora do Valsona z 31..01.1886, cyt. za J. Dauben, dz. cyt., s. 293.

były doniosłym czynnikiem kreującym jego wizję zarówno nauk przyrodniczych, jak i filozofii przyrody.

Powstaje pytanie, jak wyobrażał sobie Cantor główne zręby przyszłej „organicznej teorii natury"? Wiodącym pojęciem tej teorii — w jego przekonaniu — powinno być teoriomnogościowe pojęcie typu porządkowego. Najogólniej rzecz biorąc, przez typ porządkowy danego zbioru *M* rozumiał Cantor produkt, który powstawał przez proces abstrakcji od jakości elementów zbioru *M*, przy równoczesnym zachowaniu ich porządku (czyli w pewnym sensie ich „kolejności" w zbiorze *M*). „Elementy zbioru *M* są do pomyślenia jako oddzielone; w intelektualnej kopii $\overline{M}$, którą ja nazywam typem porządkowym, jedności te są koniecznie połączone w organizm. W pewnym sensie typy porządkowe mogą być uważane za złożenie «materii» i «formy». Jedności, czyli elementy zbioru *M* stanowią «materię», podczas gdy «porządek» tych elementów stanowi «formę»"[27].

Cantor odwoływał się niejednokrotnie do prostego przykładu, aby przedstawić intuicję dotyczącą możliwych zastosowań pojęcia typu porządkowego. Ilustracja dotyczyła pewnego porównania z zakresu malarstwa i muzyki[28]. Jakikolwiek obraz można traktować jako zbiór punktów. Elementy owego zbioru były porządkowalne na wiele sposobów. Przykładowo Cantor podawał, że punkty obrazu mogły być porządkowane wertykalnie, horyzontalnie, a także ze względu na ich kolor (długość fali) oraz jego intensywność. Zupełnie podobnie widział porządkowanie dźwięków utworu symfonicznego. Relacja porządkująca była wprowadzona tutaj ze względu na czas trwania dźwięków, ich kolejność w utworze, wysokość, natężenie itd. Mogło się okazać, że tak heteronomiczne byty, jak obraz Rembrandta i symfonia Beethovena, posiadały dokładnie taki sam typ porządkowy. Dawało to zdaniem Cantora podstawę ściśle matematycznego porównywania różnych bytów. Co więcej, zastosowanie teorii typów porządkowych w naukach przyrodniczych mogło ujawnić niepodejrzewaną jedność pomiędzy — jak się dotąd wydawało — niesprawdzalnymi do siebie zjawiskami natury[29]. Cantor przewidywał zastosowania swojej teorii typów porządkowych nie tylko w optyce i chemii, ale wyrażał nadzieję, że prawdopodobnie okaże się ona pomocna w wyjaśnianiu zjawisk o czysto organicznym charakterze[30].

Poza dopuszczoną już na innym miejscu możliwością skonstruowania unitarnej teorii dla sporego zakresu świata zjawiskowego, prezentowana koncepcja Cantora ujawniła jeszcze jeden charakterystyczny rys jego filozoficznych przekonań, mianowicie: ich silny związek z tradycją filozofii pitagorejsko-platońskiej. Typy porządkowe spełniały w jego ontologii podobną funkcję jak liczby i idee w systemach Pitagorasa i Platona. Parafrazując kluczową tezę ontologii pitagorejskiej, można by stwierdzić, że dla Cantora „typ porządkowy był miarą wszystkich rzeczy". Ten związek okazuje się jeszcze bliższy, gdy wspomni się, że w cantorowskiej teorii mnogości typy porządkowe zbiorów dobrze uporządkowanych były utożsamiane z liczbami porządkowymi.

---

[27] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, w: Georg Cantor, *Gesammelte*, s. 380 (378–428).

[28] Por. tamże, s. 421–422.

[29] Por. tamże, s. 422–423.

[30] Por. list Cantora do G. Mittag-Lefflera z 22.09.1884, w: I. Grattan-Guiness, dz. cyt., s. 85–86.

III. OPCJA FILOZOFICZNA

Przedstawione poglądy Cantora wykazują jasno, że twórca teorii mnogości przyjął opozycyjną postawę wobec dominujących w jego oczach przekonań w zakresie filozofii przyrody. Jego krytyka mechanicyzmu została dokonana w zasadzie na dwu płaszczyznach. Po pierwsze, na gruncie samej fizyki kwestionował adekwatność mechaniki newtonowskiej w opisywaniu świata zjawiskowego. Założenia tej koncepcji, dotyczące jej podstawowych kategorii, to znaczy przestrzeni i czasu, były przyjęte zupełnie arbitralnie. Cantor proponował stworzenie alternatywnych mechanik, u podstaw których legły by inne hipotezy dotyczące natury przestrzeni i czasu. Natomiast na płaszczyźnie filozoficznej odrzucił mechanistyczne przekonanie o redukowalności wszystkich zjawisk do mechaniki. Poza tym pogląd ten był nie do przyjęcia z innych jeszcze powodów. Prowadził bowiem w konsekwencji do determinizmu, materializmu oraz ateizmu[31]. Cantor negował zatem wartość filozofii mechanistycznej również z powodów światopoglądowych.

Cantorowska filozofia przyrody była natomiast oparta na założeniach pitagorejsko-platońskich. Matematyk z Halle wykazywał w tym względzie dużą konsekwencję, bowiem również w filozofii matematyki opowiadał się zdecydowanie za opcją platońską. Charakterystyczna była próba odnajdywania w świecie zjawiskowym korelatów funkcjonujących w podmiocie poznającym pojęć teoriomnogościowych. Istniał zatem ścisły związek pomiędzy światem idei, pojęć matematycznych a otaczającą nas rzeczywistością. Poznanie świata zjawiskowego miało w propozycji cantorowskiej charakter racjonalno-dedukcyjny. Istotnym elementem tak ujmowanego procesu poznawczego miał być uniwersalny język nauk przyrodniczych. Cantor, będący pod wpływem Leibnitza i jego prób stworzenia takiego języka, proponował posługiwanie się w naukach fizykalnych, chemicznych i biologicznych stworzonym przez siebie formalizmem teorii mnogości.

Epistemologia Cantora była zatem z gruntu optymistyczna. Przekonania o racjonalno-dedukcyjnym charakterze poznania i jego pewności odcinały się zdecydowanie od minimalistycznych koncepcji epistemologicznych szkół filozoficznych w XIX wieku. Twórca teorii mnogości opowiadał się jako przeciwnik kantowskiego krytycyzmu, opartego na intuicji, a także jako przeciwnik odwołującego się jedynie do zmysłów sensualizmu oraz sceptycyzmu[32].

Poglądy Cantora były również interesujące z metodologicznego punktu widzenia. Zdawał sobie sprawę z faktu, że nauki przyrodnicze tworzą jedynie pewne modele dobrze tłumaczące jakiś zbiór obserwowanych zjawisk, lecz nie będące wcale wiernym, izomorficznym obrazem rzeczywistości. Był przekonany, iż: „nie należy twierdzić, że inne rodzaje materii nie mogły być stworzone (lub nawet, że nie zostały stworzone) przez Stwórcę, lecz jedynie, że dwa rodzaje substratów (materia i eter) wydają się być zadowalające do «wyjaśnienia» wszystkich «obserwowalnych zjawisk»"[33]. Zatem w naukach przyrodniczych dokonywało się pewnej idealizacji rzeczywistości w procesie budowania jej modeli. Cantor dopuszczał również — przynajmniej na pewnym etapie rozwoju nauk przyrodniczych — istnienie alternatywnych modeli tłumaczących

[31] Por. wspomniany list Cantora do Valsona.
[32] Por. G. Cantor, *Grundlagen*, s. 207.
[33] Manuskrypt pracy Cantora, *Zweite Mittheilung*, przechowywany w archiwum Instytutu Mittag-Lefflera w Sztokholmie, cyt. za: J. Dauben, dz. cyt., s. 295.

ten sam zbiór danych obserwacyjnych. Te poglądy — mimo platońskiej opcji twórcy teorii mnogości — nie pozwalają klasyfikować jego przekonań jako realizmu skrajnego, lecz widzieć w nich jakąś formę relizmu umiarkowanego.

Trudno jednoznacznie rozstrzygnąć, na ile cantorowska wizja rozwoju nauk przyrodniczych była koncepcją stworzoną „ad hoc" w celu osłabienia krytyk teorii mnogości, na ile zaś rzeczywiście wynikała z aktualnych pod koniec XIX wieku potrzeb nowego rozumienia świata zjawisk fizycznych i samych nauk przyrodniczych, wobec wyraźnej już wówczas niewystarczalności i załamywania się paradygmatu fizyki newtonowskiej. Gdyby poważnie potraktować zapewnienie Cantora, że tworzył teorię mnogości mając na celu lepsze wyjaśnienie świata zjawiskowego, jego koncepcja mogłaby stać się przedmiotem interesującego studium z zakresu historii i filozofii nauki. Jego poszukiwania, tkwiące swymi korzeniami w starym paradygmacie fizyki — czego najlepszym przykładem była pełna akceptacja istnienia obok materii eteru — wybiegały intuicyjnie w przyszłość ku nowemu paradygmatowi, zrywającemu z założeniem o euklidesowym charakterze przestrzeni fizycznej. Obrazowały również doskonale złożoność i wielopłaszczyznowość poszukiwań w świecie nauki w okresie zmian paradygmatycznych. Z jednej strony obejmowały próby stworzenia lub dopasowania do opisywanej rzeczywistości bardziej adekwatnego aparatu formalnego. Ale równocześnie niebagatelną rolę odgrywały przekonania filozoficzne, panujące wśród ludzi czynnie zajmujących się nauką. Analizując przeobrażenia paradygmatyczne, nie wolno również pominąć zapatrywań światopoglądowych, o czym dobitnie świadczył przykład Cantora. Zatem cały kontekst kulturowy, ścierające się przekonania filozoficzno-światopoglądowe stanowią istotny zespół czynników, którego nie sposób zaniedbać przy próbach diachronicznej rekonstrukcji rozwoju nauki.

ELEMENTE DER NATURPHILOSOPHIE GEORG CANTORS

Zusammenfassung

Georg Cantors Ansichten bildeten im Bereich der Naturphilosophie kein geschlossenes und kein volles System. Sie zeigten sich im Rahmen der philosophischen Verteidigung der Mengenlehre. Cantors Ziel war nämlich die Verteidigung der Mengenlehre, unter anderem, durch den Hinweis auf ihre eventuellen Anwendungen in den Naturwissenschaften.

Der Schöpfer der Mengenlehre war, zu dem im XIX. Jahrhundert geltenden Paradigma der Newtonischen Physik, negativ eingestellt. Die von ihm formulierten und bewiesenen Lahrsätze, die einen topologischen Charakter haben, bildeten den Ausgangspunkt für die Kritik der allgemeinen Überzeugung über den Euklides'schen Charakter der physikalischen Welt. Nach Cantor existierte auch keine absolute Zeit, die das Mass der Bewegung in der Mechanik wäre. Er hat vorgeschlagen, anstatt der Newtonischen Mechanik — alternative Mechaniken zu konstruieren, die an abweichenden Hypothesen, in betreff der topologischen Eigenschaften des physikalischen Raumes, gestützt wären.

Die Anwendung der Mengenlehre in den Naturwissenschaften, so behauptete der Mathematiker aus Halle, forderte wichtige Voraussetzungen zu tun. Es war nötig, die grundsätzlichen Bestandteile der Materie als unausdehnbare Punkte des Raumes zu behandeln und anzunehmen, dass von diesen Elementen in der physikalischen Welt, eine unendliche Menge ist. Cantor hat vorausgesehen, dass die mengenlehreartige Analyse

viele physikalische und chemische Eigenschaften der Materie zu erläutern ermöglichen wird. In der Opposition zur mechanistischen Tendenz präsentierte er eine Vision der Schöpfung einer neuen unitarischen Theorie, die neben den Phänomenen der unlebenden Natur auch die biologischen Phänomene erklären wird. Als Schlüsselstellung der „Organischen Theorie" sollte der mengenlehreartige Begriff des Ordnungstypus sein.

Die von Cantor dargestellten Ansichten zeigten seine philosophische Option. Die Abneigung gegen den Mechanizismus ergab sich nicht nur von der Kritik der Voraussetzungen der Newtonischen Mechanik. Cantors Überzeugungen nach, konnte der Mechanizismus nicht angenommen werden, denn er führte zum Determinismus, Materialismus und Atheismus. Unmöglich war eine Einschränkung aller Naturphänomene zur Mechanik.

Der Schöpfer der Mengenlehre stand unter dem Einfluss des Platonismus. Charakteristisch waren seine Versuche bei der Auffindung der Korelaten für die mengenlehreartigen Ideen in der Phänomenenwelt.

Die Erkenntnis, im Vorschlag von Cantor, hatte einen rationalen und deduktiven Charakter. Cantor stand unter dem Einfluss von Leibniz, er erblickte im Formalismus der Theorie die Art einer universellen Sprache, die epistemologische Probleme löst. Cantors Erkenntnisoptimismus zeigte sich auch in der Kritik des Kantianismus, des Sensualismus und des Skeptizismus.

Trotz starker Verbindungen mit dem Platonismus, kann mam Cantors Ansichten nicht als äusserst realistisch bezeichnen. Er war bewusst, dass die Erkenntnis in den Naturwissenschaften sich auf der Konstruirung von Modellen stützt und setzt eine gewisse Idealisierung voraus. Es scheint, dass in dieser Hinsicht Cantor auf dem Standpunkt des mässigen Realismus stand.

Die Analyse der philosophischen Affassungen von Cantor, scheint vom Standpunkt der Geschichte und der Philosophie der Wissenschaft interessant zu sein. Sie spiegelten typische Erscheinungen und Vorgänge ab, welche die paradigmatischen Änderungen in der Wissenschaft begleiteten.