Warszawskie Studia Teologiczne
XXII/1/2009, 25-32

Anna LEMAŃSKA

KILKA UWAG O ROLI KOMPUTERÓW W MATEMATYCE

Słowa kluczowe: filozofia matematyki, komputer, matematyka.
Keywords: philosophy of mathematics, computer, mathematics.

Jednym z dwudziestowiecznych wynalazków, który w istotny sposób wpłynął na cywilizację, kulturę i nasze postrzeganie świata, jest komputer. Trudno obecnie wyobrazić sobie życie bez tego – można powiedzieć – wszechobecnego urządzenia i całej techniki informatycznej z nim związanej. Komputery nie ominęły również matematyki. Stworzone przez matematyków stały się bardzo szybko ich narzędziem pracy.

Użyteczność komputera jako narzędzia pracy matematyków prowokuje do stawiania pewnych pytań filozoficznych, dotyczących przede wszystkim metody matematyki i natury wiedzy matematycznej. Ale również pojawiają się problemy ontologiczne dotyczące sposobów istnienia obiektów matematycznych w jakimś stopniu związanych z komputerami. Niektóre z tych zagadnień stały się przedmiotem zainteresowania ks. prof. Mieczysława Lubańskiego[1] W artykule wskażę kilka interesujących filozoficznie problemów związanych z wykorzystywaniem komputerów przez matematyków.

Komputer jest wysoce wyrafinowanym i skomplikowanym urządzeniem technicznym, skonstruowanym przez człowieka. Żeby to urządzenie mogło służyć do celów, do których zostało stworzone, *hardware* musi być wyposażony w *software. Hardware* jest mało interesujący z punktu widzenia filozofa matematyki, choć pewna wiedza na temat budowy i działania poszczególnych elementów komputera może być przydatna przy rozpatrywaniu niektórych zagadnień. Znacznie bardziej interesujący dla filozofa matematyki jest *software*. Co więcej, jest on również przedmiotem badania matematyki.

Na szeroko rozumiany *software* składają się systemy operacyjne, ale również języki programowania, konkretne programy itp. Języki programowania można potraktować jak sztuczne formalne języki i badać je podobnie, jak się to czyni z językami formalnymi teorii matematycznych. Z kolei programy są „zapisanymi" w jakimś języku programowania algorytmami czy ciągami algorytmów i stanowią ciąg „rozkazów", które ma wykonać komputer.

Software jest niezbędny, by komputer w ogóle działał i mógł służyć do określonych celów. Ponieważ jest to wytwór człowieka, więc istnienie poszczególnych elementów

[1] Omówienie poglądów filozoficznych ks. prof. Mieczysława Lubańskiego wraz z bibliografią jego prac znajduje się w artykule: A. Latawiec, A. Lemańska, S. W. Ślaga, *Poglądy filozoficzne Profesora Mieczysława Lubańskiego*, Studia Philosophiae Christianae 30(1994)2, s. 5-64.

software jest związane z człowiekiem. Należy podkreślić, że cały komputer, a więc i *hardware*, i *software*, jest zaprojektowany przez człowieka i działa zgodnie z wyznaczonymi przez konstruktora celami. W tym sensie bez człowieka nie byłoby tego urządzenia, nie byłoby również *software*.

Bardziej skomplikowane są zagadnienia dotyczące natury i istnienia algorytmów. Są to obiekty w pewien sposób związane z komputerem, gdyż działanie komputera wyznaczają ciągi instrukcji. Zarazem algorytmy stanowią, podobnie jak *software*, interesujący przedmiot badania matematyki.

Algorytm jest to ciąg instrukcji czy poleceń służących do rozwiązywania konkretnych problemów. Co więcej, algorytm umożliwia niejako mechaniczne rozwiązanie danego zagadnienia. Algorytmy są przede wszystkim tworzone przez człowieka, ale również mogą być „wyprodukowane" przez komputer. Można też mówić o algorytmicznym działaniu organizmów, a także funkcjonowaniu ich poszczególnych części, np. w ten sposób można interpretować, mające istotne znaczenie dla życia, sekwencje reakcji chemicznych w komórce. Czym zatem jest algorytm? Jaka jest jego natura?

Według W. Marciszewskiego algorytmy wykorzystywane przez komputery są obiektami abstrakcyjnymi[2] Takie stanowisko wydaje się być uzasadnione tym, że algorytm jako ciąg instrukcji nie jest związany z konkretnym sposobem prezentacji. Istotna jest sekwencja wykonywanych pojedynczych, prostych czynności. Wydaje się również, że algorytmy można porównać do dowodów formalnych. Algorytm jest mianowicie ciągiem instrukcji, dowód formalny zaś ciągiem formuł. W wyniku zastosowania algorytmu uzyskuje się rozwiązane problemu, a dowód formalny uzasadnia twierdzenie. Różnią się sposobem uzyskania. Ciąg instrukcji algorytmu jest wyznaczony niejako z góry przez dany problem. Natomiast kolejną formułę w dowodzie formalnym można dołączyć tylko wtedy, gdy jest aksjomatem określonego systemu formalnego lub gdy da się ją uzyskać z dotychczasowego ciągu formuł przez zastosowanie jakiejś reguły dowodzenia, a więc następna formuła może pojawić się tylko wtedy, gdy spełnia określone warunki.

Kwestie dotyczące natury algorytmu nakładają się na zagadnienie sposobu ich istnienia. Nasuwa się zatem pytanie: jaki jest status ontologiczny algorytmu? Czy zostają powołane do istnienia dopiero w momencie ich konstrukcji, czy też można mówić o ich jakimś istnieniu uprzednim w stosunku do konkretnego, istniejącego już w postaci fizycznej algorytmu. W pierwszym przypadku, wydaje się, iż trzeba uznać, że istnienie algorytmów jest związane wyłącznie z umysłem człowieka, że są to konstrukcje człowieka. W drugim przypadku, trzeba byłoby uznać, iż istnieje jakiś świat algorytmów, wszystkich możliwych algorytmów, które człowiek tylko odkrywa. Analogia między algorytmami a dowodami formalnymi nasuwa przypuszczenie, że algorytmy mogą istnieć, przynajmniej potencjalnie, niezależnie od umysłu, podobnie jak ma to miejsce w przypadku dowodów formalnych.

Wymienione przeze mnie zagadnienia pojawiają się przy analizowaniu działania komputera jako urządzenia skonstruowanego do wykonywania zamierzonych przez

[2] W. MARCISZEWSKI, *Philosophy of Mind and Artificial Intellingence*, http://www.calculemus.org/lect/08szt-intel/potega-alg.html (31.05.2010).

projektanta czynności. Ale „współpraca" matematyka z komputerem również stwarza szereg interesujących filozoficznie kwestii. Komputer jako narzędzie jest wykorzystywane przez matematyków przede wszystkim do wykonywania rozmaitych obliczeń numerycznych, w szczególności do rozwiązywania (z reguły przybliżonego) równań i układów równań algebraicznych, różniczkowych, obliczania całek itp. Służy również do sprawdzania poprawności dowodów matematycznych, a także do automatycznego dowodzenia twierdzeń. Jest także pomocny przy dowodzeniu twierdzeń (uzyskuje się tzw. dowody wspomagane komputerowo) oraz pozwala na dokonywanie swoistych eksperymentów z obiektami matematycznymi.

Wykorzystywanie komputerów do obliczeń jest najwcześniejsze i niejako naturalne. Nie stwarza zatem szczególnie interesujących filozoficznie problemów. Maszyna cyfrowa jest tu potraktowana jak duża grupa rachmistrzów czy jak udoskonalone liczydło. W gruncie rzeczy jest to wykorzystanie komputera do celu, dla którego został skonstruowany. Warto jednak dodać, że metody numeryczne, które są wykorzystywane w trakcie obliczeń, i związane z nimi algorytmy stanowią interesujący przedmiot badania matematyków, a także filozofów zajmujących się sztuczną inteligencją, algorytmizacją rozumowań itp.

Wykorzystanie komputera przy sprawdzaniu poprawności dowodów matematycznych może posłużyć do formułowania nowych argumentów w dyskusjach nad istotą dowodu matematycznego, rozstrzygalnością, czy „zmechanizowaniem" dowodzenia.

W pozostałych sytuacjach, w których korzysta się z komputerów, można mówić o pewnych obiektach, które są generowane komputerowo. Obiektami uzyskiwanymi za pomocą komputera są przede wszystkim: dowody komputerowe, tzw. dowody wspomagane komputerowo oraz wyniki różnego typu symulacji komputerowych. Gdy rozpatruje się tego typu obiekty, wtedy pojawiają się pytania o sposób ich istnienia. Te kwestie ontologiczne są interesujące, gdyż w tym przypadku komputer jest nośnikiem tych obiektów.

Dowody komputerowe powstają w trakcie automatycznego dowodzenia twierdzeń. Jest to niewątpliwie obiekt stworzony przez komputer. Czy jednak różni się on zasadniczo od „zwykłych" dowodów przeprowadzanych przez matematyków? Wydaje się, że nie. Istota takiego dowodu jest bowiem taka sama jak „normalnego", przeprowadzonego przez człowieka, dowodu formalnego. Jeżeli dowody traktujemy jak ciągi formuł o określonych własnościach, to określenie języka formalnego i wybór aksjomatów generuje wszystkie możliwe konsekwencje tych aksjomatów, zarazem wszystkie możliwe dowody. Komputer tylko odkrywa, ujawnia wcześniej już istniejący ciąg formuł, spełniający warunki, by być dowodem formalnym.

Tzw. dowody wspomagane komputerowo są przeprowadzane przez matematyka z pomocą komputera, który wykonuje potrzebne w dowodzie obliczenia. Może się bowiem zdarzyć, że przeprowadzenie dowodu wymaga sprawdzenia bardzo wielu przypadków, co praktycznie jest niemożliwe nawet dla grupy matematyków w rozsądnym czasie. Pojawienie się tego typu dowodów wywołało ożywione dyskusje wśród matematyków i filozofów matematyki dotyczące istoty dowodu matematycznego. Jednym z pierwszych i najszerzej znanym twierdzeniem udowodnionym za pomocą komputera było twierdzenie o czterech barwach[3] Obecnie dowodów wspomaganych komputerowo istnieje bardzo wiele. Część udowodnionych w ten sposób twierdzeń została również udowodniona w tradycyjny sposób, bez pomocy komputera. Ale jest wiele twierdzeń, które posiadają tylko dowody wspomagane przez komputer. Jednym z nich jest właśnie twierdzenie o czterech barwach. Istnienie tego typu dowodów sprawia, że wygłaszane są rozmaite opinie na temat istoty dowodów matematycznych, metody matematyki i samej matematyki. W szczególności głoszone są poglądy, że mamy do czynienia z odmiennym rozumieniem standardów ścisłości w matematyce niż kiedyś, czy wręcz o zmianie paradygmatu matematyki. Podstaw dla tego typu stwierdzeń doszukuje się m.in. w tym, że dowody wspomagane komputerowo opierają się na przesłankach, wśród których są zasady działania komputera, prawidłowość jego oprogramowania, poprawność algorytmów wykorzystywanych w dowodzie. Toteż przy „tworzeniu" tego dowodu zaangażowanych jest wiele osób: od teoretyków-fizyków, przez inżynierów, programistów aż do matematyków, którzy korzystają z danego komputera i jego oprogramowania do przeprowadzenia dowodu. Sprawdzenie poprawności działania tych wszystkich elementów nie jest możliwe krok po kroku bez udziału komputera. W tym kontekście M. Lubański pisze o dowodzie zespołowym[4] Co więcej, stwierdza, że dopuszczenie takich dowodów zbliża matematykę do nauk przyrodniczych[5] i konkluduje, że „powiedzieć, że matematyka jest nauką dedukcyjną (tj. tylko dedukcyjną), znaczy to samo, co powiedzieć, że komputer (sam) rozwiązuje zadanie"[6] Takie stanowisko przyjmuje wielu filozofów matematyki. Niektórzy twierdzą, że matematyka jest wręcz nauką empiryczną i hipotetyczną.

Trzeba jednak podkreślić, że dowód wspomagany komputerowo w zamierzeniu przeprowadzającego go ma być dowodem dedukcyjnym, więcej, rozpisanie go na elementarne operacje wykonywane przez komputer powoduje, że dowód taki można potraktować jak dowód formalny. To, że nie zawsze jesteśmy w stanie wykazać, że dowód jest poprawny, jest sprawą niejako drugorzędną, nie mającą istotnego znaczenia dla określenia natury dowodu. Wydaje się zatem, że nie można mówić o jakiejś zasadniczej zmianie paradygmatu matematyki z tego powodu, że dowodzi się twierdzeń, pomagając sobie komputerem. Dowody wspomagane komputerowo są dowodami ze swej istoty dedukcyjnymi. Zaś w definicji dowodu dedukcyjnego jego długość nie odgrywa żadnej roli. Oczywiście im dłuższy dowód, tym większe trudności nastręcza sprawdzenie jego poprawności. Warto w tym kontekście wspomnieć o klasyfikacji grup skończonych prostych. Dowód tego twierdzenia (jest to dowód tradycyjny, w którym nie jest wykorzystywany komputer) jest bardzo obszerny, składa się z wielu

---

[3] K. APPEL, W. HAKEN, J. KOCH, "Every Planar Map Is Four Colorable", *Illinois Journal of Mathematics* 21(1977) 429-567.

[4] M. LUBAŃSKI, "Komputerowa metoda dowodzenia?", *Studia Filozoficzne* (1984) nr 7, 21-28. „Metoda komputerowa poszerza pojęcie dowodu poprzez dopuszczenie tzw. dowodów zespołowych oraz pewnego rodzaju eksperymentowania za pomocą maszyny" (s. 26).

[5] M. LUBAŃSKI, "Próba oceny różnych stanowisk w filozofii matematyki", w: *Matematyczność przyrody*, red. M. HELLER, J. ŻYCIŃSKI, A. MICHALIK, Kraków 1992, 61.

[6] *Tamże*, 61.

części i jest dziełem różnych matematyków. W swej istocie nie odbiega wiele od dowodów wspomaganych przez komputer[7]

Ciekawą grupę obiektów matematycznych generowanych przez komputer stanowią wyniki działania rozmaitych programów komputerowych, które mają na celu bądź symulację jakiegoś procesu, bądź zobrazowanie konkretnego obiektu. Przykładem symulacji są badania na komputerze układów dynamicznych, a przykładami obiektów kreowanych przez komputer są zbiory fraktalne.

To, co uzyskuje się na monitorze czy wydruku komputerowym, badając dynamikę chaotyczną[8], można zaliczyć do swoistego „kreowania" obiektów matematycznych przez komputer. Jednym z pierwszych, który w tym celu wykorzystał komputer, był J. von Neumann, ojciec techniki komputerowej. Badał on układ nieliniowych równań różniczkowych hydrodynamiki. Warto dodać, że komputer posłużył mu do „eksperymentowania" z obiektami matematycznymi. „Von Neumann formułował pewną hipotezę na temat zachowania badanych równań, wybierał szczególne sytuacje, pozwalające ją sprawdzić, i następnie rozwiązywał ten szczególny przypadek na komputerze, aby porównać wyniki z przewidywaniami. Następnie formułował nową hipotezę i cały cykl się powtarzał"[9] Do podobnego celu wykorzystał komputer w 1963 r. E. N. Lorenz, badając układ trzech nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, opisujący stan atmosfery. W szczególności odkrył on wrażliwość tego układu na warunki początkowe[10] Współczesne komputery nie tylko pozwalają uzyskiwać przybliżone rozwiązania tego układu, ale również obrazować ich zachowanie. Na monitorze mianowicie widać, jak trajektoria układu dynamicznego generowanego przez układ Lorenza jest przyciągana przez ograniczony obszar przestrzeni fazowej i jak zakreśla w tym obszarze w nieregularny sposób pętle z prawej i lewej strony (ilość zakreślanych pętli nie wykazuje żadnych regularności)[11]

Badając dynamikę chaotyczną, można śledzić generowane przez komputer trajektorie układów dynamicznych, wykresy różnych charakterystyk takich układów, wykresy funkcji, iteracje odwzorowań, wreszcie atraktory układów dynamicznych. Na monitorze zatem obserwuje się własności interesujących matematyka obiektów, zmiany pewnych wielkości w zależności od zmian interesujących go parametrów itp. Dzięki otrzymanym na tej drodze wynikom matematyk może uzyskać nowe informacje, na ich podstawie wysunąć hipotezę, a następnie potwierdzić ją w pewnym zakresie bądź sfalsyfikować.

---

[7] P. J. DAVIS, R. HERSH, *Świat matematyki*, tłum. R. Duda, Warszawa 1994, 337-339.

[8] Określenie „chaos" w kontekście układów dynamicznych zostało po raz pierwszy użyte przez Y. Li i J. Yorke'a w artykule: "Period Three Implies Chaos", *The American Mathematical Monthly* 82(1975), 985-992. Wcześniej do podobnych wyników jak w powyższym artykule doszedł A. N. Szarkowski w pracy: "Coexistence of Cycles of a Continuous Map of Line into Itself", *Ukrainian Mathematical Journal* 16(1964), 61-71.

[9] P. COVENEY, R. HIGHFIELD, *Granice złożoności. Poszukiwania porządku w chaotycznym świecie*, tłum. P. Amsterdamski, Warszawa 1997, 88.

[10] J. GLEICK, *Chaos. Narodziny nowej nauki*, tłum. P. Jaśkowski, Poznań 1996, 23-24. Wrażliwość układu na zmianę warunków Lorenz obrazowo określił „efektem motyla"

[11] H.G. SCHUSTER, *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, tłum. P. Pepłowski, K. Stefański, Warszawa 1995, 111-112.

Wyniki komputerowe podpowiadają zatem matematykowi, jakie własności ma badane przez niego „zjawisko", dzięki czemu matematyk może formułować hipotezy, a następnie poszukiwać ich dedukcyjnych dowodów. Sposób wykorzystania komputera przypomina w tym przypadku wykonywanie eksperymentów przez przyrodnika. Toteż mówi się o eksperymentach komputerowych. Wykorzystywanie komputerów przez matematyków stwarza też nowe perspektywy badawcze, gdyż poszerza zakres możliwości dokonywania swoistych doświadczeń z modelami komputerowymi obiektów matematycznych.

Wśród tych różnych obiektów obrazowanych przez komputer szczególne miejsce zajmują zbiory fraktalne[12] Szersze zainteresowanie nimi i ich badanie stało się możliwe właśnie dzięki technice komputerowej, choć przykłady zbiorów fraktalnych były znane znacznie wcześniej. Intuicyjnie są one najbliższe temu, co rozumie się przez obiekt generowany komputerowo. W przypadku zbiorów fraktalnych mamy do czynienia z abstrakcyjnymi, matematycznymi obiektami, które z reguły są na tyle skomplikowane, że ich badanie bez pomocy komputera jest niemożliwe. Szybkie przeprowadzanie obliczeń, które byłyby praktycznie niewykonalne bez posłużenia się komputerem, stworzyło nowe warunki dla badania zbiorów fraktalnych. Spektakularnym przykładem zbioru fraktalnego jest zbiór Mandelbrota. Jest to taki zbiór liczb zespolonych c, dla których ciąg $z_{n+1}=z_n^2+c$, gdzie $z_0=0$, jest ograniczony. Zbiór ten jest tak skomplikowany, że jego badanie jest przeprowadzane prawie wyłącznie przy użyciu komputera. Również do badania obszarów przyciągania pierwiastków zespolonych równań algebraicznych służą komputery. Symulacje komputerowe ukazują nam na ekranie niezwykle skomplikowane samopodobne struktury, które tworzą granice tych obszarów[13] W szczególności J. Hubbard, badając brzeg obszarów przyciągania dla pierwiastków zespolonych równania $z^3=1$, zauważył, że granica między obszarami jest wspólnym brzegiem wszystkich tych trzech obszarów[14]

W komputerze zbiory fraktalne i inne tego typu obiekty powstają dzięki algorytmom, pozwalającym na uzyskanie ich przybliżonych obrazów na monitorze czy wydruku. Często zbiory fraktalne są określane przez definicje iteracyjne. Łatwo je zatem zalgorytmizować, toteż komputer staje się niezastąpionym narzędziem dla ich „zobrazowania" Trzeba podkreślić jednak, że te obiekty, które widzimy na monitorze czy wydruku, są daleko niedoskonałymi, skończonymi przybliżeniami obiektów matematycznych. Są to zobrazowane dzięki komputerowi abstrakcyjne obiekty matematyczne, które są na tyle złożone, że nie jest możliwe ich wyobrażenie bez narzędzia, pozwalającego w krótkim czasie wykonać dostateczną ilość operacji, by takie wyobrażenie uzyskać. Jak zatem odpowiedzieć na pytanie, czy są to rzeczywiście obiekty generowane przez komputer, w sensie – tworzone przez komputer? Wydaje się, że nie są to obiekty „komputerowe"; są to obiekty matematyczne, które komputer pomaga tylko badać.

---

[12] Twórcą teorii fraktali jest B. Mandelbrot. Przykłady zbiorów fraktalnych i ich zastosowań zawarł w monografii *The Fractal Geometry of Nature*, New York 1983.

[13] H. G. SCHUSTER, *dz. cyt.*, 146-147.

[14] J. GLEICK, *dz. cyt.*, 224-228.

Warto dodać, że obiekty uzyskiwane za pomocą komputera nie różnią się w istocie od zwykłych rysunków sporządzanych na kartce papieru za pomocą ołówka, linijki, cyrkla itp. Obrazowe przedstawiane pewnych obiektów matematycznych jest dobrze znane w praktyce matematyków. Często też rysunek podpowiadał matematykowi sformułowanie twierdzenia. Toteż istota rzeczy nie uległa zmianie – mamy tylko do dyspozycji nieco bardziej złożone narzędzie niż kartka papieru, ołówek i linijka.

Ponieważ obiekty „komputerowe" są obiektami matematycznymi, zatem problem sposobu ich istnienia sprowadza się do problemu istnienia innych obiektów matematycznych. W tej kwestii istnieje cały szereg stanowisk od skrajnie nominalistycznego aż po skrajnie realistyczne (platońskie). W szczególności R. Penrose uważa, że zbiór Mandelbrota istnieje niezależnie od matematyka i komputera[15] Niewątpliwie, zbiory fraktalne istnieją w jakiś sposób zanim zostaną zobrazowane przez komputer, gdyż to najpierw matematyk podaje ich określenie i tworzy algorytm, za pomocą którego komputer te obiekty tworzy. Zatem korzystanie z komputera do obrazowania pewnych obiektów matematycznych nie wnosi zasadniczych nowych elementów w spory ontologiczne dotyczące matematyki.

To powyższe stwierdzenie można jednak nieco osłabić, zauważając, że obiekty badane komputerowo są z reguły unikatowymi obiektami, nie związanymi z jakąś matematyczną strukturą. Można zatem ich istnienie wykorzystać w dyskusjach między zwolennikami strukturalizmu bezobiektowego, a zwolennikami innymi stanowisk w kwestii istnienia obiektów matematycznych. Według strukturalizmu bezobiektowego istotne są relacje między elementami, a nie same te elementy. Zatem nie jest ważne, czym są elementy dziedziny struktury, a istotne stają się same relacje. To relacje nadają kształt strukturze, za elementy (za kresy relacji) możemy zaś podstawiać cokolwiek. Dla identyfikacji struktury kresy relacji nie mają żadnego znaczenia. Zatem uprawnione jest np. stwierdzenie, że liczba naturalna jest określona poprzez relacje w pewnej szczególnej strukturze (czy dokładniej w klasie wszystkich struktur izomorficznych między sobą). W takim sensie bycie liczbą naturalną jest własnością czysto relacyjną. Nie istnieją zatem jakieś obiekty matematyczne, są tylko miejsca w strukturze, wyznaczone przez relacje.

Warto jednak dodać, że zwolennicy stanowiska strukturalizmu bezobiektowego najczęściej strukturę traktują jak byt idealny, a więc przyjmują jakąś formę platonizmu. W taki sposób strukturę widzą S. Shapiro[16] i M. Resnik[17], ale odrzucają oni istnienie jakichś obiektów matematycznych, które traktują tylko jako miejsca w strukturze, wyznaczone przez relacje. Istnienie zbiorów fraktalnych w pewnym żakresie podważa jednak obraz matematyki jako nauki o strukturach matematycznych. Badane komputerowo zbiory fraktalne są obiektami jednostkowymi, w pewnym sensie unikalnymi, niepowtarzalnymi. Matematyka w tych przypadkach interesuje przede wszystkim konkretny przedmiot matematyczny, na przykład, własności zbioru Cantora czy Mandel-

[15] R. PENROSE, *Nowy umysł cesarza*, tłum. P. Amsterdamski, Warszawa 1995, 113-119.

[16] S. SHAPIRO, "Mathematics and Reality", *Philosophy of Science* 50(1983) nr 4, 534-542.

[17] M. D. RESNIK, "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference", *Noûs* 15(1981), 529-530; TENŻE, "Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology", *Noûs* 16(1982), 95-99.

brota, a nie jakaś mająca określać te zbiory struktura, której często w ogóle nie ma[18] W tym znaczeniu badania tego typu obiektów za pomocą komputera może przyczynić się do rozjaśnienia pewnych kwestii ontologicznych.

Wykorzystywanie komputerów przez matematyków, stwarzając nowe warunki pracy matematyka i otwierając nowe obszary badawcze, jednocześnie prowokuje do postawienia szeregu pytań, ale raczej dotyczących metody uprawiania matematyki niż kwestii ontologicznych. Jednym z nich jest pytanie: czy posługiwanie się komputerem zmieniło dotychczasową praktykę uprawiania matematyki? Wydaje się, że na razie nie można mówić o jakiejś zasadniczej zmianie paradygmatu matematyki. Komputer dla matematyka jest narzędziem analogicznym np. do teleskopu dla astronoma. Pomaga zobaczyć więcej, ale nie oznacza to, że tworzy coś istotnie nowego. Zarazem jak trudno byłoby wyobrazić sobie dziś pracę astronoma bez rozmaitych urządzeń odbierających sygnały z dalekich obszarów Wszechświata, tak bez komputerów wiedza matematyczna zostałaby poważnie zubożona. Komputer zatem jest tylko narzędziem i jego wykorzystywanie w badaniach matematycznych nie daje definitywnych rozstrzygnięć kwestii epistemologicznych, jak i ontologicznych matematyki. Badania obiektów matematycznych za pomocą komputerów wskazuje na ich odniesienie do jakiejś rzeczywistości matematycznej poza komputerem, gdyż obiekty, które są modelowane przez komputer, istnieją w jakiś sposób zanim zostały wygenerowane komputerowo.

A FEW REMARKS ABOUT THE ROLE OF COMPUTERS IN MATHEMATICS

Summary

Computers create new conditions of mathematicians' activities and expand research areas of mathematics. Using computers provokes also to put questions concerning the methods of investigation of mathematics and the ways of existing objects produced by computers as algorithms, computer-assisted proofs, and fractals. In the article some problems connected with these topics were touch on.

[18] Omówienie przykładów takich obiektów matematycznych, które są interesujące dla matematyka „same w sobie", a nie poprzez ich strukturalne własności, jest w: K. WÓJTOWICZ, *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Warszawa 1999, 144-148.