

Ks. Zbigniew Wolak

Instytut Teologiczny, Tarnów

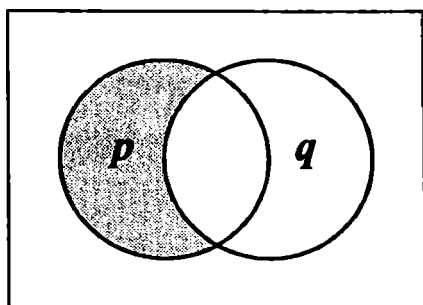
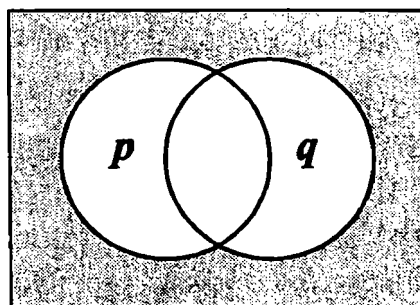
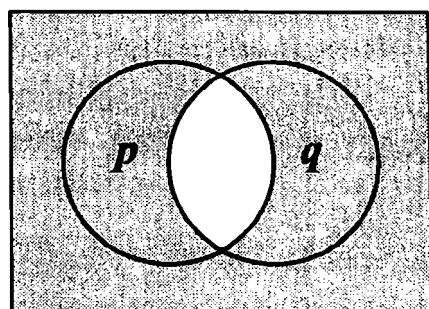
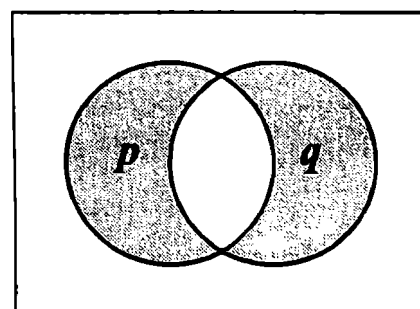
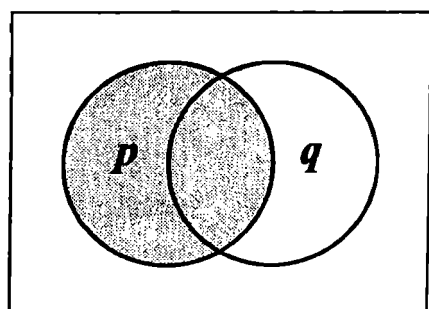
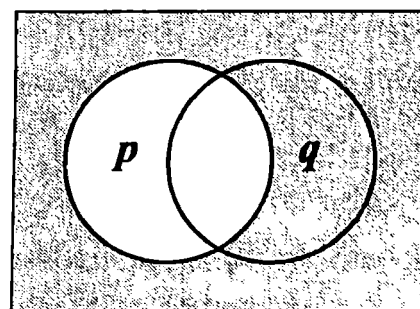
GRAFICZNA METODA SPRAWDZANIA WYRAŻEŃ KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ

W klasycznym rachunku zdań stosuje się kilka metod dowodzenia twierdzeń tego rachunku: semantyczną, czyli zero-jedynkową, założeniową i aksjomatyczną. Metoda proponowana w tym artykule nie zawiera jakiegokolwiek istotnie nowej idei logicznej, jest raczej pewną techniką, która wykorzystuje idee znane już wcześniej. Pomysł graficznego sprawdzania wyrażenia rachunku zdań być może nie jest nowy, ale w swojej krótkiej praktyce nauczyciela logiki nie spotkałem się z czymś podobnym u jakiegoś autora.

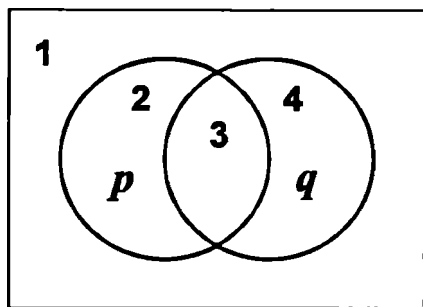
Przedstawiona niżej metoda polega na zastosowaniu odpowiednio zinterpretowanych diagramów Venna, stosowanych zwykle do sprawdzania poprawności trybów sylogistycznych. Metoda ta posiada pewne zalety, które postaram się krótko przedstawić. Pierwszą jej zaletą jest fakt, że jest to kolejna metoda sprawdzania wyrażenia logicznych. Im więcej takich metod znamy, tym lepiej, szczególnie wtedy, gdy nie posiadamy jeszcze dużej biegłości w dowodzeniu. Wykorzystywane metody wspierają się i sprawne posługiwanie się jedną pomaga lepiej posługiwać się także innymi. Prezentowana metoda wykorzystuje diagramy Venna wykorzystywane w logice nazw. Sprawność w posługiwaniu się tymi diagramami może być łatwo wykorzystana dla potrzeb logiki zdań przez zwiększenie zakresu ich stosowania. Inne zalety metody graficznej będą przedstawione przy omawianiu przykładów.

Metoda graficzna posiada też pewne cechy, które równie dobrze można nazywać zaletami, jak i wadami, na razie nie warto się o to spierać. Nie jest to „czysta” metoda, ale łączy pewne cechy metody semantycznej i założeniowej. Poza tym jest ona bardziej „abstrakcyjna” od pozostałych metod, gdyż wartościom logicznym przyporządkowuje pewne punkty w przestrzeni i stosunki między zdaniami wyraża poprzez stosunki przestrzenne. Wadą metody graficznej jest z pewnością to, że nie powinna ona być stosowana samodzielnie, jest raczej uzupełnieniem innych metod.

Sposobem graficznym można sprawdzać wszystkie wyrażenia rachunku zdań, które posiadają do 4 zmiennych zdaniowych. Przy większej ilości zmiennych ta metoda staje się nieekonomiczna, chociaż nie niemożliwa do zastosowania. Sprawdzenie zaczyna się od wypisania założeń, następnie założenia te są zaznaczane na diagramie. Poszczególne wyrażenia zaznacza się w ten sposób, że zaciemnione fragmenty oznaczają takie kombinacje zdań składowych, które nie spełniają danego zdania złożonego. Oto sposoby oznaczania poszczególnych zdań:

Rys. 1. Implikacja $p \Rightarrow q$.Rys. 2. Alternatywa $p \vee q$.Rys. 3. Koniunkcja $p \wedge q$.Rys. 4. Równoważność $p \Leftrightarrow q$.Rys. 5. Negacja $\sim p$.Rys. 6. Stwierdzenie p .

Poszczególne pola diagramu odpowiadają rozkładowi wartości logicznych zdań składowych:

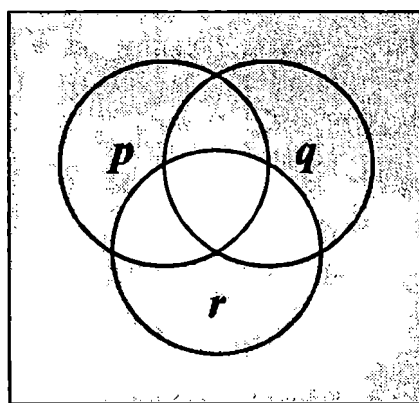


Rys. 7

Pole/zdanie	p	q
1	0	0
2	1	0
3	1	1
4	0	1

Kolejne założenia nanosimy na diagram w ten sposób, że zaciemniamy obszary wskazane tymi założeniami. Ponieważ założenia tworzą koniunkcję, zaciemnienia się dodają, a pozostały biały obszar oznacza wynikające z tych założeń wnioski. Poszczególne przesłanki można znaczyć różnymi kolorami. Można też, jeśli jest do dyspozycji komputer z programem graficznym, każdą przesłankę umieszczać w innym diagramie, a potem nałożyć wszystkie diagramy w jeden, zyskując w ten sposób koniunkcję tych przesłanek.

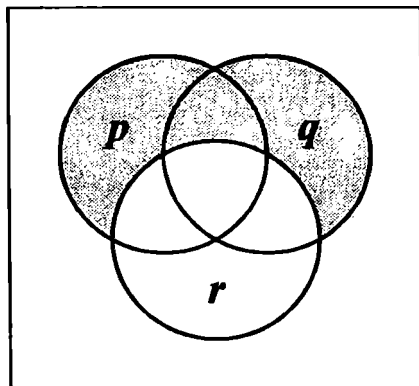
Pierwszym przykładem będzie dowód twierdzenia $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow r$. Ponieważ w tym wyrażeniu występują trzy zmienne zdaniowe, skorzystamy z diagramu z trzema kołami.



Rys. 8

Jak widać, pozostały niezaciemniony obszar w całości zawiera się w zakresie prawdziwości zmiennej zdaniowej r , tym samym r wynika z przyjętych założeń i badane wyrażenie jest twierdzeniem KRZ. Z diagramu wynika, że wniosek można przedstawić jako alternatywę, czyli sumę trzech białych pól. Wniosek ten będzie miał następującą postać: $p \wedge \sim q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \sim r \vee \sim p \wedge q \wedge r$ lub po zastosowaniu prawa łączności: $r \wedge (p \wedge \sim q \vee p \wedge q \vee \sim p \wedge q)$. Oczywiście najbardziej interesujący wniosek to r , ale nie zawsze tak musi być. Widzimy, że metoda graficzna pozwala nie tylko sprawdzić dane wyrażenie, ale również wskazuje na wszystkie wnioski, jakie wynikają z przyjętych założeń. Przy pomocy tej metody możemy również modyfikować założenia tak, aby otrzymać to, czego potrzebujemy. Wyjaśnimy to na innym przykładzie.

Przy pomocy diagramu można też sprawdzić równoważność. Jeśli równoważność jest prawdziwa, to oba jej człony można przedstawić na identycznym diagramie. Na przykład równoważność $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \Rightarrow r$ można sprawdzić przy pomocy diagramu następująco.



Rys. 9

Diagram ten przedstawia każdą ze stron zapisanej powyżej równoważności. Ogólniej można stwierdzić, że jeśli białe pole na diagramie wyrażenia α zawiera się, na przykład po nałożeniu, w białym polu wyrażenia β , to wtedy prawdziwa jest implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$. Na przykład diagram przedstawiony na rysunku 8 przedstawia lewą stronę rozważanej tam implikacji. Diagram dla samego r zawiera białe koło r i zaciemnioną resztę (por. rys. 6). Biała część tego diagramu może pomieścić w sobie białą część diagramu z rys. 8, zatem z założeń przedstawionych na tym diagramie wynika implikacyjnie zdanie r , ale nie odwrotnie.

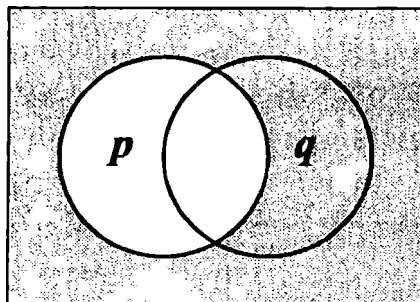
Można też metodą graficzną sprawdzać wyrażenia, które nie mają formy implikacji. Takie wyrażenie będzie posiadało diagram cały biały. Na przykład, budując diagram dla wyrażenia $\sim(p \wedge \sim p)$, najpierw zaciemniamy kolejno całe otoczenie koła p , następnie zaciemniamy samo koło p , w ten sposób otrzymujemy diagram w całości zaciemniony. Na końcu wykonując operację negowania odwracamy zaciemnienie: co było zaciemnione, staje się białe, co było białe, staje się zaciemnione. W rozważanym przypadku otrzymujemy diagram cały biały. Tym sposobem można również sprawdzać implikacje, co łatwo można sobie wyobrazić, jeśli implikację $\alpha \Rightarrow \beta$ wyrazimy w postaci $\sim(\alpha \wedge \sim\beta)$. Tym sposobem można sprawdzić, czy wyrażenie jest prawdziwe, ale ponadto niewiele możemy się o nim dowiedzieć, dlatego nie będziemy się tym więcej tutaj zajmować.

Nie zawsze założenia są tak proste jak w wyrażeniach dotychczas rozważanych. Przy bardziej skomplikowanych zdaniach można przy dobrej wyobraźni posługiwać się ogólnymi algorytmami dla poszczególnych wyrażeń, na przykład implikację $\alpha \Rightarrow \beta$ przedstawiamy w ten sposób, że zakreślamy tę część α , która nie jest β . Można też posłkować się metodą zero-jedynkową.

Na przykład w diagramie wyrażenia $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ zakreślamy te pola diagramu, dla których wartość wyrażenia wynosi 0. Odczytujemy to z tabelki:

$$\begin{array}{cc} (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \\ 010 & 00 \end{array}$$

Taką charakterystykę posiada pole 1 z rysunku 7. Dla przykładu sprawdźmy wyrażenie $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow p]$. Założeniami są wyrażenia $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$.



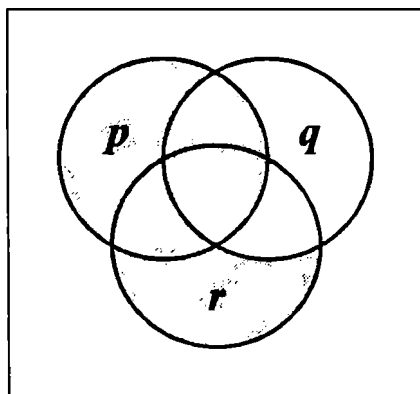
Rys. 10

Jednocześnie widzimy, że ze sprawdzanego wyrażenia łatwo można otrzymać równoważność $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$.

W podobny sposób możemy radzić sobie ze zdaniami zaprzeczonymi. Na przykład wyrażeniu $p \Rightarrow \sim q$ zgodnie z tabelką

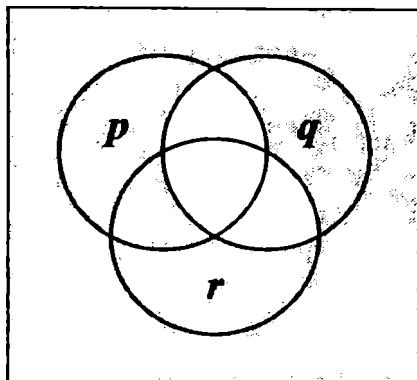
$$\begin{array}{cc} p \Rightarrow \sim q \\ 10 & 01 \end{array}$$

odpowiada zaczerwienie pola 3 z rys. 7. Przykładem wykorzystania tej przesłanki będzie dowód prawa $(p \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$.



Rys. 11

W następnym przykładzie pojawi się przesłanka $\sim p \Rightarrow r$, którą zaznaczymy zaczerwiając tę część $\sim p$, która nie jest r . Prawo, którego chcemy dowieść, jest następujące $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow q$.



Rys. 12

Z diagramu możemy odczytać, że z przyjętych założeń wynika nie tylko q , ale również $p \vee r$. Wynikają też inne zdania, które są mniej interesujące.

Korzystając z tego przykładu zwróćmy uwagę na inną możliwość, jaką daje metoda graficzna. Przypuśćmy, że chcemy otrzymać twierdzenie, w którym z przyjętych wyżej założeń wynika zdanie p . W tym celu musimy, jak widać z diagramu, wyeliminować pole $\sim p \wedge q \wedge r$. Można oczywiście do założeń dołożyć zaprzeczenie tego wyrażenia, ale prościej będzie jako dodatkowe założenie wykorzystać implikację $q \Rightarrow p$ lub $r \Rightarrow p$. Wtedy jednak otrzymamy wniosek zbyt mocny $p \wedge q$. Jeśli chcemy otrzymać samo p , to można wyeliminować założenie $p \Rightarrow q$. Przy okazji tych poszukiwań udało się znaleźć co najmniej cztery równoważności:

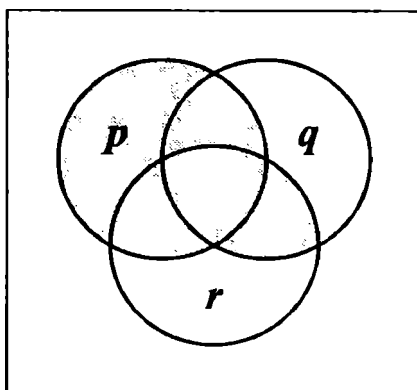
$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \wedge q,$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \wedge q,$$

$$(r \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p,$$

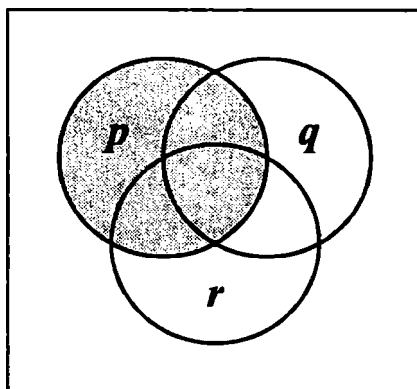
$$(r \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p) \Leftrightarrow p.$$

W następnym przykładzie również poszukamy sposobu otrzymania równoważności z implikacji. Dowód prawa $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Rightarrow \sim p$ wygląda następująco:



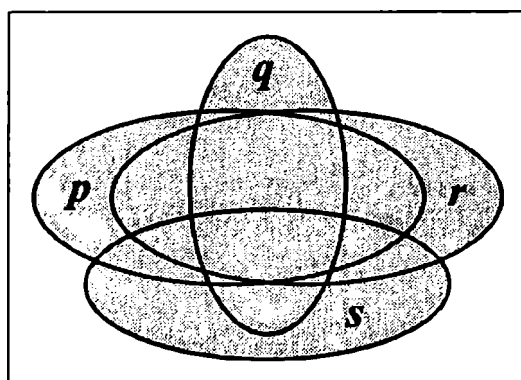
Rys. 13

W celu otrzymania równoważności możemy pozostawić bez zmian prawą stronę wyrażenia, a w lewej dokonać takiej zmiany, która oznaczałaby zlikwidowanie zaciemnienia fragmentu $\sim p \wedge q \wedge r$. Możemy to uzyskać zastępując trzecie założenie wyrażeniem $q \wedge r \Rightarrow \sim p$. W rezultacie otrzymamy prawo $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \wedge r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow \sim p$, któremu odpowiada diagram identyczny dla lewej i prawej strony równoważności.



Rys. 14

Metodą graficzną można również sprawdzać wyrażenia KRZ, które zawierają cztery zmienne zdaniowe. W tym celu musimy się posługiwać diagramem o szesnastu polach odpowiadających wszystkim kombinacjom wartości logicznych tych zmiennych zdaniowych. Dla przykładu dowiedzmy prawa $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge \sim(q \vee s) \Rightarrow \sim(p \vee r)$.

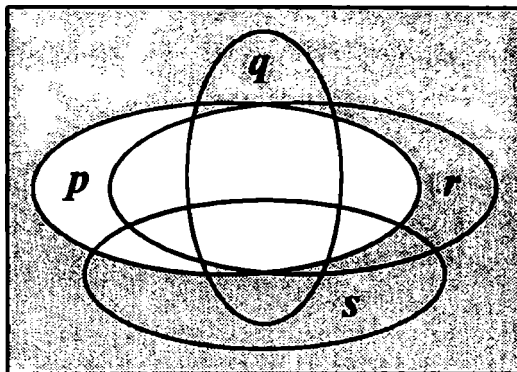


Rys. 15

Tutaj także możemy łatwo otrzymać równoważność umieszczając w następniku implikacji zamiast zaprzeczenia alternatywy dwóch zmiennych zdaniowych koniunkcję zaprzeczeń wszystkich zmiennych. Nie byłoby to jednak ciekawe prawo, bo koniunkcja zaprzeczeń zmiennych zdaniowych q i s jest zamieszczona wśród założeń w postaci zaprzeczenia alternatywy tych zmiennych.

Jako kolejny przykład rozważmy prawo $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow p)]$. Zaznaczając na diagramie kolejne przesłanki, zatrzymajmy się po

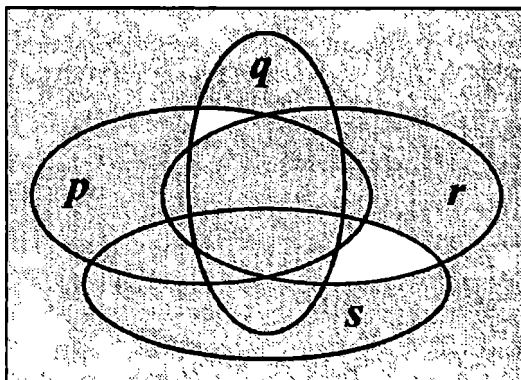
dwóch: $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$ i $(r \Rightarrow p)$. Pierwszą z nich: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ łatwiej będzie narysować, jeśli wyrazimy ją w postaci $(p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$. Otrzymamy wtedy taki diagram.



Rys. 16

Celem dowodu jest p i z diagramu widać, że zdanie to wynika już z dwóch pierwszych przesłanek, czyli przesłanka s jest niepotrzebna. Jest ona wprowadzona do twierdzenia na podstawie prawa symplifikacji. Ktoś wprawiony nieco w logice dojdzie do tego wniosku również innymi drogami, ale może być też tak, że niejeden ujrzy to po raz pierwszy korzystając z metody graficznej.

Na zakończenie tej części poznamy jeszcze graficzny dowód prawa Haubera $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow r)$.



Rys. 17

Z diagramu możemy odczytać, że z przyjętych założeń wynika nie tylko koniunkcja implikacji, jak w sprawdzanym twierdzeniu, ale też koniunkcja równoważności. Nie jest to duże odkrycie, bo dwa pierwsze założenia zawierają implikacje odwrotne do tych, które są we wniosku, więc łatwo możemy dowieść, że w rezultacie prowadzą one do równoważności. Ciekawsze może być stwierdzenie, że z założeń rozważanego twierdzenia wynika też wyrażenie $p \wedge q \vee r \wedge s$, ale z obu tych wniosków żaden nie wynika z drugiego. Wiemy to stąd, że żaden z diagramów, tj. suma białych pól, nie zawiera się w drugim, ponieważ krzyżują się między sobą. Oczywiście oba te wnio-

ski i wszystkie, jakie w ogóle mogłyby wynikać z przyjętych w tym twierdzeniu przesłanek wynikają z wyrażenia $p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s \vee \sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge s$, które jest wyrażoną przez alternatywę sumą wszystkich białych pól. Wyrażenie to odpowiada odczytanej z diagramu sumie wszystkich założeń, inaczej można to wyrazić równoważnością $p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s \vee \sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge s \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s)$. Taką równoważność możemy utworzyć w każdym dowodzie graficznym.

Jak wyżej zaznaczono metoda graficzna wykorzystująca zamieszczone powyżej diagramy w zasadzie ogranicza się do czterech zmiennych, gdyż już przy pięciu zmiennych trzeba by wprowadzić do diagramu krzywą o nieregularnym kształcie i rysunek stałby się zbyt zawity.¹

Nie znaczy to jednak, że metoda graficzna staje się przy większej ilości zmiennych niemożliwa do stosowania. Trzeba wykorzystać inny rodzaj diagramu. Skorzystamy mianowicie z diagramów w postaci tabeli, stosowanych również w logice nazw.² Dla czterech zmiennych zdaniowych diagram jest zbudowany z szesnastu kolumn i czterech wierszy.

<i>p</i>	X	X	X	X	X	X	X	X								
<i>q</i>	X	X	X	X					X	X	X	X				
<i>r</i>	X	X			X	X			X	X			X	X		
<i>s</i>	X		X		X		X		X		X		X		X	

Poszczególne kolumny tabeli odpowiadają polom poprzednich diagramów, które obrazują te same kombinacje prawdy i fałszu. Komórki puste odpowiadają prawdzie, komórki z X-em – fałszowi. Założenia są zaznaczane podobnie jak w poprzednich diagramach: zaciemnieniu pola tutaj odpowiada zaciemnienie kolumny. Dla przykładu zbudujmy diagram dla prawa $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge \sim(q \vee s) \Rightarrow \sim(p \vee r)$, zilustrowanego na rys. 15. Pokażemy etapy umieszczania kolejnych założeń na diagramie:

– przesłanka pierwsza: $(p \Rightarrow q)$

<i>p</i>	X	X	X	X	X	X	X	X								
<i>q</i>	X	X	X	X					X	X	X	X				
<i>r</i>	X	X			X	X			X	X			X	X		
<i>s</i>	X		X		X		X		X		X		X		X	

¹ Prawdopodobnie jeszcze bardziej skomplikowany byłby diagram oparty na układzie elips stosowanym w podręczniku J. Słupeckiego i L. Borkowskiego *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa: PWN 1984, s. 148.

² Por. S. Łuszczewska-Romałnowa, *Analiza i uogólnienie metody sprawdzania formuł logicznych przy pomocy diagramów Venna*, SL 1 (1953), 187n.

– przesłanka druga: $(r \Rightarrow s)$

<i>p</i>	X	X	X	X	X	X	X	X								
<i>q</i>	X	X	X	X					X	X	X	X				
<i>r</i>	X	X			X	X			X	X			X	X		
<i>s</i>	X		X		X		X		X		X		X		X	

– przesłanka trzecia: $\sim(q \vee s)$ lub $\sim q \wedge \sim s$ (pozostawiamy niezaciemnione tylko te kolumny, w których występują X-y zarówno w wierszu *q*, jak i w wierszu *s*)

<i>p</i>	X	X	X	X	X	X	X	X								
<i>q</i>	X	X	X	X					X	X	X	X				
<i>r</i>	X	X			X	X			X	X			X	X		
<i>s</i>	X		X		X		X		X		X		X		X	

Pozostaje niezaciemniona tylko kolumna pierwsza, w której spełniony jest umieszczony w prawie wniosek $\sim(p \vee r)$. Zachowują swoją ważność wszystkie uwagi, które dotyczą diagramu z elipsami.

Programy komputerowe ułatwiają wykorzystanie pewnej modyfikacji w wykorzystywaniu diagramów tabelkowych. Zamiast zaciemniać kolumny i wyobrażać sobie, że oznaczają one wyeliminowane założeniami kombinacje, można te kolumny wyłączać z diagramu, kasować je, jest to bardzo prosty zabieg w prawie wszystkich edytorach tekstów. Dowiedzmy tym sposobem znanego nam już prawa Haubera $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow r)$. W kolejnych czterech diagramach zostaną przedstawione efekty uwzględniania założeń tego prawa.

I: $(p \Rightarrow q)$

<i>p</i>	X	X	X	X	X	X	X	X				
<i>q</i>	X	X	X	X								
<i>r</i>	X	X			X	X			X	X		
<i>s</i>	X		X		X		X		X		X	

II: $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

<i>p</i>	X	X	X	X	X	X				
<i>q</i>	X	X	X							
<i>r</i>	X	X		X	X		X	X		
<i>s</i>	X			X			X			

użytkownika tej metody. Kombinacje tych cech dają cztery rodzaje dowodów od najlepszych, które są łatwe i twórcze, do najgorszych, które są trudne i nietwórcze. Jestem przekonany, że te pierwsze przeważają.

Inną zaletą proponowanej metody jest to, że współpracuje ona nie tylko z pozostałymi metodami stosowanymi w KRZ, ale również z metodami graficznymi w logice nazw. Umiejętność posługiwania się przedstawioną w artykule metodą może być wykorzystana w tradycyjnej sylogistyce zdań kategoriycznych, w sylogizmach posiadających więcej niż jeden termin średni. Łatwiej będzie też posługiwać się metodami graficznymi w dowodach twierdzeń z nazwami zaprzeczonymi czy w dowodach pewnych twierdzeń wężego rachunku predykatów. Na pewno istnieją jeszcze inne możliwości stosowania analogicznych wobec siebie metod graficznych w różnych działach logiki.³

Stwierdziłem na początku artykułu, że przedstawiona w nim metoda może być przede wszystkim wykorzystana w nauczaniu KRZ, wydaje się jednak, że nie należy z góry zawężać możliwości tej metody.

THE GRAPHIC METHOD OF PROVING IN PROPOSITIONAL CALCULUS

S u m m a r y

This paper presents a method of the graphic proofs in propositional calculus. We can use diagrams, similar to Venn's diagrams to draw premisses and inferences. Then we can check their validity. The diagrams enable us to see whether premisses are sufficient or too strong and what other inferences could be derived.

The graphic method could be used as an educational aid in teaching logic. Sometimes it is simpler than other methods, sometimes it is more difficult, but always it is creative. One more advantage of the graphic method is the possibility of using computer programs in performing logical proofs.

³ Na przykład we wspomnianym wyżej artykule S. Łuszczewskiej-Romahnowej autorka dokonuje pewnego przeformułowania zdań kategoriycznych, rezygnując z wyjaśnienia zasad tego przeformułowania, gdyż jak pisze zajęłoby to zbyt wiele miejsca (por. 189). Otóż znajomość naszej metody graficznej sprawia, że dokonywane przez autorkę przeformułowanie staje się niemal oczywiste i nie wymaga wielu wyjaśnień. Z pewnością tego typu wzajemnych ułatwień jest między metodami graficznymi wiele.